Studio di Funzione

Prof. A. Pisani

Esempio

Data la funzione: $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

tracciatene il grafico nel piano cartesiano.

1) Tipo e grado della funzione

La funzione è **analitica**, data nella **forma esplicita** $y = f(x)$ è **razionale algebrica,** dato che non compaiono radici né funzioni trascendenti come seno, coseno e logaritmi, inoltre è **fratta** dato che l'incognita x appare anche al denominatore.

Per stabilire il grado della funzione la si trasforma in razionale intera, ovvero si esegue una serie di operazioni, nel rispetto dei principi di equivalenza delle equazioni, in modo tale da ridurre ad uno i denominatori ed eliminare le eventuali radici. Nel caso della funzione data, si moltiplicano i due membri di destra e di sinistra per (x-1) in modo da avere:

$$y(x-1) = \frac{x^2}{x-1}(x-1)$$

e quindi, semplificando il membro di destra:

$$yx - 1 = x^2$$

che è un polinomio di **grado 2**.

Vale la pena di notare che la funzione può essere scritta nella forma seguente $yx - 1 - x^2 = 0$ ovvero secondo la forma $F(x,y) = 0$ detta **forma implicita**. In questa forma la funzione è equivalente a quella data ovunque in $\Re$ tranne che nel punto x=1 che, come vedremo, risulta esterno al dominio D della funzione in forma esplicita poiché ne annulla il denominatore. Nel caso della forma $F(x,y) = 0$ il valore di x=1 non annulla nessun denominatore, tuttavia risulta impossibile calcolare il valore di y per x=1 dato in corrispondenza di tale x si ottiene una equazione impossibile: $y - y - 1 = 0$.

2) Dominio

Si dice **dominio** della funzione l'insieme D dei valori (reali) che la variabile (indipendente) x può assumere affinché sia calcolabile la variabile (dipendente) y. In simboli:

$$D = \{x \in \Re : \exists y = f(x) \in \Re\}$$

Nel caso di una funzione razionale fratta, possiamo scrivere la funzione come il rapporto tra il numeratore n(x) ed il denominatore d(x):

$$y = \frac{n(x)}{d(x)}$$

in questo modo risulta che f(x) esiste per tutti quei valori di x che non annullano il denominatore, e quindi la condizione che determina D è:

$$d(x) \neq 0$$

Nel nostro caso: $d(x) = x - 1$ e quindi il dominio è definito dalla equazione: $d(x) = x - 1 \neq 0$ risolta da: $x \neq 1$ per cui:

$$D = \Re - \{1\} = \{x \in \Re : x \neq 1\}$$

3) Parità

Con **parità** si intende indicare le eventuali proprietà di simmetria nella funzione. Tali proprietà consentono di ridurre di molto il campo nel quale è necessario studiare la funzione per riuscire a tracciarne il grafico in tutto il dominio D.

Una funzione si dice **pari** se vale:

$$f(-x) = f(x)$$

con $x \in D$. Il grafico di una funzione pari presenta **simmetria rispetto all'asse delle y** (ordinate) nel piano cartesiano.

Una funzione si dice **dispari** se vale:

$$f(-x) = -f(x)$$

con $x \in D$. Il grafico di una funzione dispari presenta **simmetria rispetto all'origine**.

Nel caso non sia verificata nessuna delle due precedenti relazioni, si dice che la funzione **ha parità indefinita**.

Nel caso della funzione in esame vale:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = \frac{x^2}{-x-1} = -\frac{x^2}{x+1}$$

che risulta diversa sia da f(x) che da -f(x) e quindi la parità di f(x) risulta indefinita e la funzione quindi non gode di nessuna simmetria evidente.

4) Segno

Si vuole qui esaminare quali sono gli intervalli di valori di x per i quali la funzione f(x) assume valori positivi o negativi o nulli. Il problema si formalizza come segue:

$$f(x) \geq 0$$

Nel caso di una funzione razionale fratta, la precedente disequazione assume la forma:

$$y = \frac{n(x)}{d(x)} \geq 0$$

Per la funzione in esame:

$$n(x) = x^2 \quad d(x) = x - 1$$

Studiare il segno di f(x) equivale a studiare il segno del numeratore n(x) e del denominatore d(x) separatamente e quindi di individuare quegli intervalli nel dominio D per i quali n(x) e d(x) hanno segno concorde o discorde. Per la funzione in esame:

$n(x) \geq 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \geq 0$

dato che n(x) è il quadrato di x, n(x) risulta essere positivo per tutti valori di x, ed è nullo solo per x=0. In simboli:

$n(x) > 0 \quad \forall x \in \Re_0$

$n(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0$

Nel caso del denominatore, abbiamo già visto che nel dominio d(x) non può annullarsi e quindi consideriamo la disequazione:

$$d(x) > 0$$

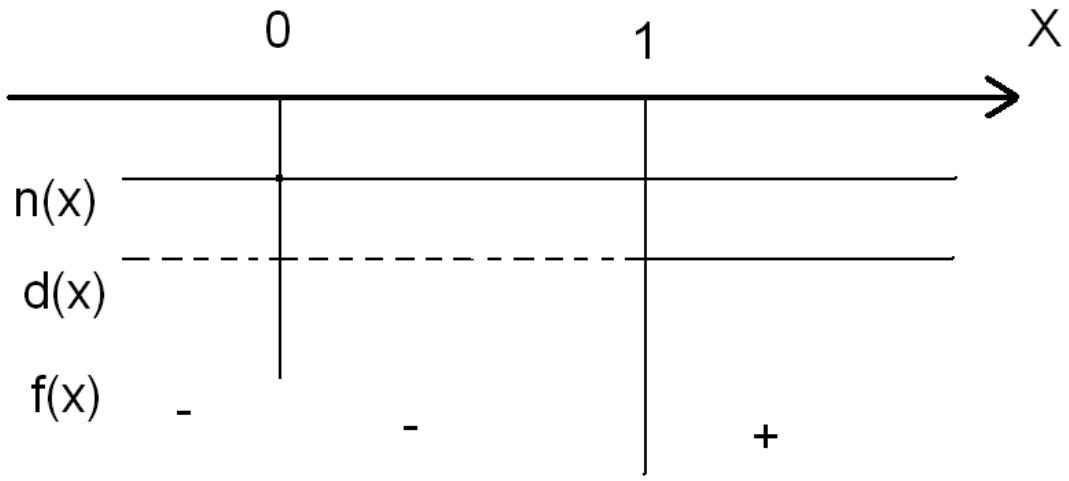
che per la funzione in esame diventa:

$$x - 1 > 0$$

risolta da:

$$x > 1$$

Quanto detto viene riassunto nello schema seguente:



Possiamo quindi concludere che:

$$y = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 0$$
$$y > 0 \quad \leftrightarrow \quad x > 1$$
$$y < 0 \quad \leftrightarrow \quad x < 1$$

5) Discontinuità

Dallo studio del dominio e del segno risulta che: $\lim_{x\to 1^{\pm}} n(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}} x^2 = 1 \neq 0$ e $\lim_{x\to 1^{\pm}} d(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}} (x-1) = 0^{\pm}$ ne consegue che: $\lim_{x\to 1^{+}} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^{-}} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$ (vedi anche la tabella ove è descritto il segno della funzione) da quanto risulta si può quindi concludere che la funzione in esame ammette nel punto x=1 **una discontinuità di seconda specie, a divergenza.**

Non sono presenti altre discontinuit\`a in quanto in nessun altro punto del dominio D la funzione presenta salti o indeterminazioni.

6) Asintoti

Da quanto ottenuto nello studio delle discontinuità risulta che la retta di equazione $x = 1$ **è asintoto verticale** per il grafico di $y = f(x)$. Infatti, in generale, se vale che: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ allora la retta di equazione $x = x_0$ è asintoto verticale per $y = f(x)$.

Passiamo agli asintoti obliqui ed orizzontali. In generale l'equazione di questi asintoti è del tipo: $y = mx + q$ ove: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$.

Nel caso della funzione in esame quindi:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

ed inoltre:

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{x-1} \right] = 1$$

quindi la retta di equazione: $y = x + 1$ è **asintoto obliquo** alla funzione in esame.

Dato che $m \neq 0$ non vi sono asintoti orizzontali, infatti:

$$\lim_{x\to x\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

mentre in generale se vale:

$$\lim_{x\to x\infty} f(x) = k$$

con $k \neq \infty$ allora la retta $y = k$ è asintoto orizzontale della funzione $y = f(x)$.

7) La derivata prima, studio del segno, massimi e minimi

Calcoliamo la derivata prima della funzione in esame:

$$y' = f'(x) = Df(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Come si può vedere, anche la derivata è una funzione algebrica razionale fratta. Il denominatore della $f'(x)$ vale $(x-1)^2$ e si annulla per gli stessi valori che annullano il denominatore della

funzione in esame $f(x)$. Per questo motivo il dominio della derivata $f'(x)$ e quello della funzione $f(x)$ coincidono. Questo significa che $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ è ovunque derivabile nel suo dominio D.

Studiamo ora il segno della derivata. Il numeratore x^2-2x è positivo per $x<0$ e $x>2$ mentre è nullo per $x=0$ e $x=2$. Il denominatore, essendo un quadrato, è ovunque positivo tranne che per $x=1$ ove si annulla. Da questo si conclude che $f'(x)>0$ (e quindi la funzione $f(x)$ è **crescente**) per $x<0$ e $x>2$, mentre $f'(x)=0$ per $x=0$ e $x=2$. La derivata prima $f'(x)$ è negativa e quindi la funzione è **decrescente** negli intervalli: $0<x<1$ e $1<x<2$.

Nel punto $x=1$ la derivata prima $f'(x)$ ha una discontinuità a divergenza, infatti per $x\to 1$ il numeratore $x^2-2x\to -1$, mentre il denominatore $(x-1)^2\to 0^+$ e quindi:

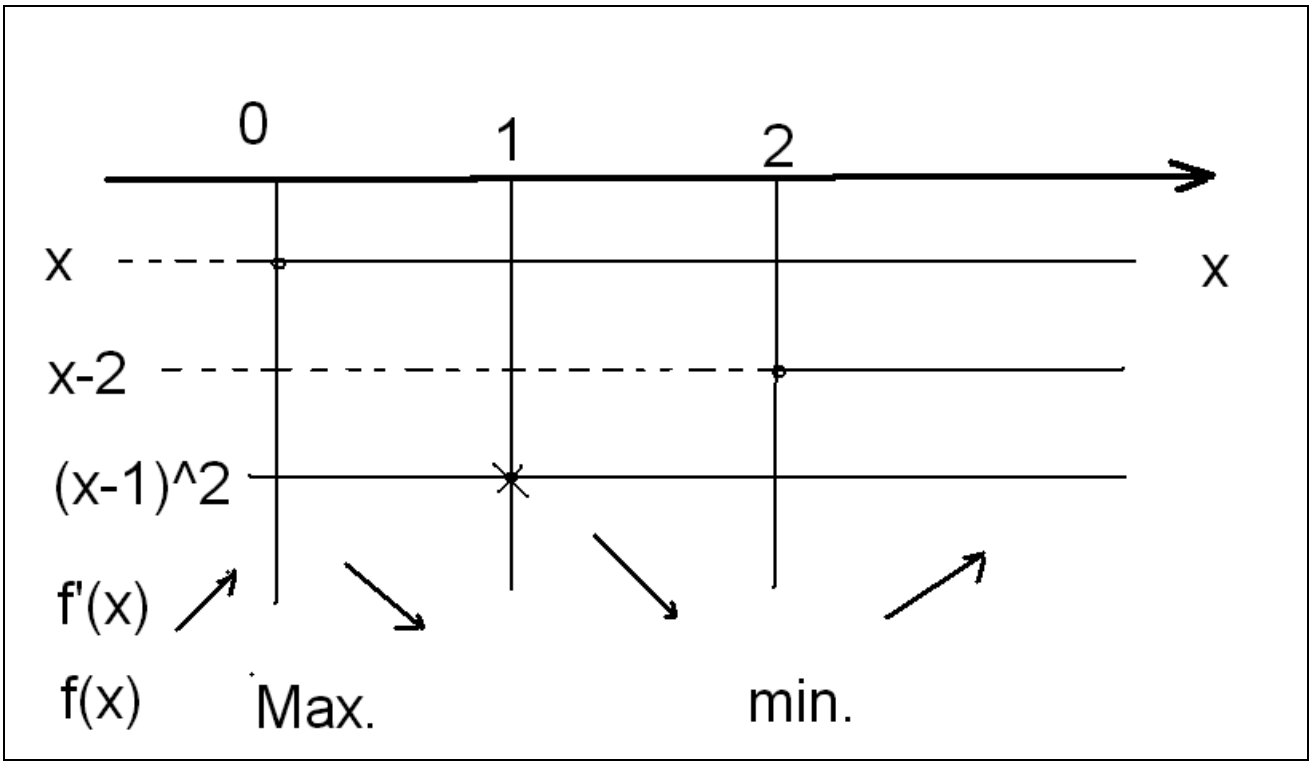
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=-\infty$$

in accordo con il fatto che la funzione ha come asintoto verticale la retta $x=1$.

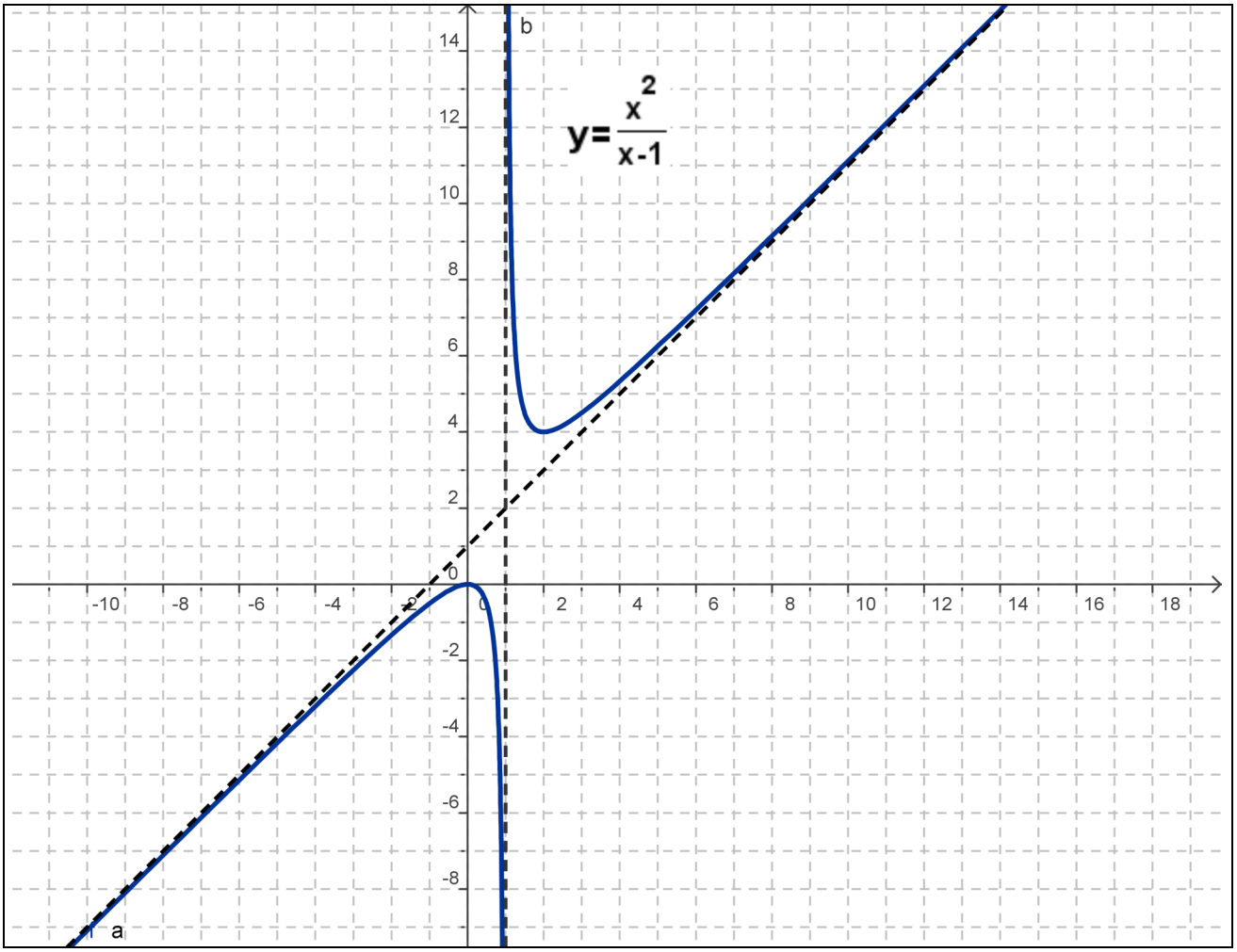
Inoltre $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=1$ in accordo col fatto che la pendenza (m) dell'asintoto obliquo vale 1.

Infine dallo studio del segno della derivata prima si osserva che per $x=0$ si ha $f(0)=0$ e in questo punto la funzione ha un massimo relativo. Per $x=2$ si ha $f(2)=4$ e la funzione presenta un punto di minimo relativo. Le coordinate del **massimo relativo** sono: $(0;0)$, quelle del **minimo relativo** sono $(2;4)$.

Quanto detto viene riassunto nello schema seguente:



8) La derivata seconda e la concavità

La derivata seconda della funzione vale: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ e quindi ha lo stesso dominio della funzione $f(x)$ ed inoltre assume lo stesso segno di $(x-1)$, per cui $f''(x) > 0$ per $x > 1$, mentre $f''(x) < 0$ per $x < 1$. Dato che il numeratore della derivata seconda vale 2 ed è quindi sempre diverso da zero indipendentemente dal valore di x, la derivata seconda non si annulla per nessun x. In conclusione la **concavità** della funzione è diretta verso l'alto (ovvero nella direzione positiva dell'asse y) per $x > 1$, mentre è diretta verso il basso (direzione negativa dell'asse y) per $x > 1$. La funzione non presenta **flessi** orizzontali.

9) Il grafico